درس سوم : همسانی و یکسانی بین گروه ها

۱ مقدمه

گروه $G_1 := \{1, -1\}$ باعمل ضرب و هم چنین گروه $G_2 := \{0, 1\}$ با عمل جمع به پیمانه 2 و گروهی مثل $G_3 := \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$ را که عناصر آن از ماتریس تشکیل شده اند،درنظر بگیرید. این سه گروه ظاهرمتفاوتی دارند ولی اگر خوب دقت کنیم همه آنها ساختمان یکسانی دارند بدین معنا که تا آنجا که جدول ضرب آنها مطرح است این سه گروه را می توان با گروه زیریکسان دانست:

$$G := \{e, a\}, \quad a^2 = e. \tag{1}$$

یکسان بودن این سه گروه به این معناست که می توان عناصرآنها را به یکدیگر نگاشت بطوریکه جدول ضرب آنها حفظ شود. بنابراین، این گروه ها ساختار یکسانی دارند و نمی توان به آنها به عنوان سه گروه متفاوت نگاه کرد. دراین فصل به مفهوم یکسانی [1] بین گروه ها و تبعات آن می پردازیم.

۲ تعاریف اساسی

تعریف: نگاشت $\phi : G \longrightarrow G'$ بین دوگروه G و G' یک همسانی [2] نامیده می شود اگر داشته باشیم:

$$\phi(g_1 g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2). \tag{2}$$

ازاین رابطه می توان نتیجه گرفت که

$$\phi(e) = e' \tag{3}$$

که درآن e و e' به ترتیب عضو واحد گروه G و عضو واحد گروه G' هستند. هم چنین می توان نتیجه گرفت که

$$\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}. \tag{4}$$

[1] Isomorphism
[2] Homomorphism

مثال: نگاشت $\phi: G \longrightarrow G$ یک همسانی از G به روی خودش است.

مثال: نگاشت $\phi: GL_n(C) \longrightarrow SL_n(C)$ که به صورتِ $\phi(g) = \frac{g}{det(g)}$ تعریف می شود یک همسانی است.

مثال: نگاشت $\phi: GL_n(C) \longrightarrow C - \{0\}$ که به صورتِ $\phi(g) = det(g)$ تعریف می شود یک همسانی است.

تعریف: هرگاه یک نگاشت همسانی وارون پذیر باشد آن را یکسانی می گوییم . دراین صورت دوگروه G و G' یکسان [3] خوانده می شوند.

مثال: یکسانی گروه $U(1)$ و گروه $SO(2)$.

می دانیم که

$$U(1) := \{e^{i\phi}, |\phi \in [0, 2\pi]\}, \tag{5}$$

$$SO(2) := \{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} |\phi \in [0, 2\pi]\}. \tag{6}$$

حال نگاشت زیررا تعریف می کنیم:

$$\psi: SO(2) \longrightarrow U(1), \qquad \psi(\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}) = e^{i\phi} \tag{7}$$

براحتی می توان تحقیق کرد که این نگاشت همسانی و وارون پذیراست و بنابراین یک یکسانی بین گروه های $SO(2)$ و $U(1)$ است.

مثال: یکسانی Z, nZ.

می دانیم که nZ گروه اعداد صحیح مضرب n باعمل جمع است، یعنی

$$nZ := \{nz | z \in Z\}. \tag{8}$$

نگاشت ψ را به شکل زیرتعریف می کنیم:

$$\psi: Z \longrightarrow nZ, \qquad \psi(z) = nz. \tag{9}$$

[3] Isomorphic

براحتی می توان تحقیق کرد که این نگاشت همسانی و وارون پذیراست و بنابراین یک یکسانی بین گروه های Z و nZ است.

مثال: یکسانی بین گروه گیسوی B_2 و Z.

می دانیم که گروه B_2 تنهایک مولد دارد به اسم σ_1 و تمام گیسوهای این گروه از عمل σ_1 یا وارون آن به وجود می آیند. رسم یک شکل دراینجا به دانشجو کمک می کند. بنابراین

$$B_2 = \{{\sigma_1}^n, n \in Z\}. \tag{10}$$

هم چنین می دانیم که ${\sigma_1}^n{\sigma_1}^m = {\sigma_1}^{n+m}$. حال نگاشت زیرراتعریف می کنیم:

$$\psi : B_2 \longrightarrow Z, \qquad \psi({\sigma_1}^n) := n. \tag{11}$$

براحتی می توان تحقیق کرد که این نگاشت همسانی و وارون پذیراست و بنابراین یک یکسانی بین گروه های B_2 و Z است.

دردرس های آینده مثال های پیچیده تری از یکسانی را ارایه خواهیم کرد.

قضیه کایلی:[4] هرگروه متناهی از مرتبه n با زیرگروهی از S_n یکسان است.

اثبات: فرض کنید که $G := \{a_1, a_2, \cdots a_n\}$ یک گروه متناهی است. دراین صورت می توان نگاشت زیر راازاین گروه به S_n تعریف کرد:

$$\phi : a_i \in G \longrightarrow \phi(a_i) \in S_n \qquad \phi(a_i)(a_1, a_2, \cdots a_n) := (a_ia_1, a_ia_2, \cdots a_ia_n). \tag{12}$$

با توجه به خواص گروه می توان براحتی فهمید که $(a_ia_1, a_ia_2, \cdots a_ia_n)$ یک جایگشت از $(a_1, a_2, \cdots a_n)$ است. هم چنین داریم:

$$\phi(a_ia_j) = \phi(a_i)\phi(a_j). \tag{13}$$

هم چنین این نگاشت یک به یک است زیرا:

$$\phi(a_i) = \phi(a_j) \longrightarrow \phi(a_i)a_k = \phi(a_j)a_k \longrightarrow a_ia_k = a_ja_k \longrightarrow a_i = a_j. \tag{14}$$

[4] Cayley

بنابراین نگاشت فوق یک همسانی از G به S_n تعریف می کند. هرگاه نگاشت را به تصویر خودش که زیرمجموعه ای از S_n است محدود کنیم، یک نگاشت پوششی خواهد شد و درنتیجه وارون پذیر می شود. درنتیجه حکم ثابت می شود.

۳ یکسانی گروه های $SU(2)/Z_2$ و $SO(3)$

در ادامه مثال های همسانی و یکسانی به دو مثال مهم توجه می کنیم که بدلیلِ کاربردهای فراوان، در فیزیک حائز اهمیت هستند. دراین بخش به یکسانی گروه های $SO(3)$ و $SU(2)/Z_2$ می پردازیم. می دانیم که گروه $SO(3)$ گروه دوران های فضای سه بعدی اقلیدسی است. هرگاه $A \in SO(3)$،یک دوران و $\vec{r} \in R^3$ یک بردارسه بعدی باشد آنگاه

$$\vec{r'} = A\vec{r} \tag{15}$$

دوران یافته $\vec{r}$ است.

تمرین: ماتریس هایی که دوران حول محور های x، y و یا z را ایجاد می کنند بدست آورید.

ازطرف دیگر می خواهیم نشان دهیم که دوران های فضای سه بعدی را با ماتریس های $SU(2)$ که دوبعدی هستند نیز می توان انجام داد. برای اینکه این نتیجه به ظاهرعجیب را بفهمیم به ترتیب زیر پیش می رویم: به ازای هربردار $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$، ماتریس P را به شکل زیرتعریف می کنیم:

$$P := \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix} \equiv x_i\sigma_i = \vec{r} \cdot \vec{\sigma}. \tag{16}$$

که دررابطه آخر ازقرارداد جمع روی اندیس های تکراری استفاده شده است و $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$.

این ماتریس خاصیت های زیررادارد:

الف: هرمیتی است.

ب : بدون رد است.

ج : $\det P = -\vec{r}\cdot\vec{r}$.

حال باماتریس $U \in SU(2)$ تبدیل زیر را روی این ماتریس انجام می دهیم:

$$P' = UPU^{\dagger} \tag{17}$$

خواننده می تواند براحتی تحقیق کند که ماتریس P' نیزدارای همان خاصیت های الف تا ج است. چنین ماتریسی دقیقاً همان فرمی را دارد که دررابطه (16) آمده است. بنابراین این ماتریس را نیزمی توان به یک برداریاهمان اندازه نسبت داد.یعنی می توان نوشت :

$$P' = \begin{pmatrix} z' & x' - iy' \\ x' + iy' & -z' \end{pmatrix} \equiv x'_i\sigma_i = \vec{r'}\cdot\vec{\sigma}. \tag{18}$$

بنابراین ماتریس یکانی U بردار سه بعدی r را به بردار r' باهمان اندازه تبدیل می کند. ضمناً اگر U نزدیک به ماتریس واحد باشد، r نیزنزدیک r' خواهد بود. بنابراین U واقعاً یک دوران ایجاد می کند و نه چیزی شبیه به انعکاس نسبت به مبداء یا نسبت به یک محور. (باید به این نکته‌ی آخر دقت کنیم زیرا این نوع تبدیلات نیز یک بردارِ $\mathbf{r}$ را به یک بردار هم اندازه‌ی $\mathbf{r}'$ تبدیل می کنند.)

تمرین: تبدیل $U = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}$ را روی ماتریس P اعمال کنید و بگویید که این تبدیل چه نوع دورانی انجام می دهد؟

تمرین: ماتریس U را چنان پیدا کنید که یک دوران حول محور x به اندازه زاویه θ انجام دهد. همین کار را برای دوران حول محور y نیز تکرار کنید. با استفاده از نتایجی که بدست آورده اید شکل ماتریسی را حدس بزنید که دورانی حول محورِ $\mathbf{n}$ به اندازه‌ی θ انجام دهد. سپس به هر طریقی که می توانید حدس خود را امتحان کنید.

حال توجه می کنیم که دوران انجام شده توسطِ ماتریس $U \in SU(2)$ به طریقه‌ی نشان داده شده در رابطه‌ی 18 توسط یک ماتریسِ $A \in SO(3)$ نیز انجام می شود. یعنی

$$r' = Ar \tag{19}$$

بنابراین به هرماتریس $U \in SU(2)$ می توانیم یک ماتریس $A \in SO(3)$ نسبت بدهیم که همان تبدیل را روی بردارهای سه بعدی اعمال می کند. حال فرض کنیدکه بعداز تبدیل U تبدیل U' رااعمال کنیم که ماتریس متناظرباآن در $SO(3)$، A' است. دراین صورت بردار r' تبدیل به بردار r'' می شود وداریم:

$$P' = UPU^\dagger \qquad P'' = U'P'U'^\dagger \tag{20}$$

$$r' = Ar \qquad r" = A'r' \tag{21}$$

از دورابطه (20) نتیجه می گیریم

$$P'' = U'(UPU^\dagger)U'^\dagger = (U'U)P(U'U)^\dagger. \tag{22}$$

یعنی دوران مرکب با ماتریس $U'U$ انجام می شود. ازرابطه (21) نیزبدست می آوریم

$$r'' = A'Ar, \tag{23}$$

که به این معناست که ماتریس متناظربا $U'U \in SU(2)$ ماتریس $A'A \in SO(3)$ است. درنتیجه این نگاشت یک همسانی از $SU(2)$ به سوی $SO(3)$ است. اگردقیق تر نگاه کنیم این رابطه یک به یک نیست زیرا U و $-U$ هردویک دوران ایجاد می کنند. بنابراین به هر هم مجموعه دوتاییِ $\{U, -U\}$ یک عضو از گروه $SO(3)$ نسبت داده می شود. ولی این دقیقاً به این معناست که یک یکسانی بین گروه خارج قسمت $SU(2)/Z_2$ و $SO(3)$ برقراراست . یعنی

$$SU(2)/Z_2 \approx SO(3). \tag{24}$$

در واقع می دانیم که $H = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \}$ یک زیرگروه از $SU(2)$ است که با گروهِ Z_2 یکسان است. هم مجموعه های این زیر گروه به صورت $\{U, -U\}$ هستند. بنابراین تناظر گروهِ $SO(3)$ با هم مجموعه های این زیر گروه در واقع همان تناظرِ $SO(3)$ با گروه خارج قسمتِ $SO(3)/Z_2$ است.

برای اینکه رابطه صریح U و A را بدست آوریم می نویسیم:

$$U(x_i\sigma_i)U^\dagger = x'_i\sigma_i \equiv A_{ij}x_j\sigma_i \tag{25}$$

طرفین این رابطه را درσ_k ضرب می کنیم:

$$tr(\sigma_k U x_i \sigma_i U^\dagger) = tr(\sigma_k A_{ij} x_j \sigma_i) \tag{26}$$

حال ازرابطه $tr(\sigma_i\sigma_j) = 2\delta_{ij}$ استفاده می کنیم و بدست می آوریم:

$$A_{jk} = \frac{1}{2} tr(\sigma_j U \sigma_k U^\dagger). \tag{27}$$

این رابطه به طور صریح بیان می کند که درایه های ماتریس A چگونه از ماتریس U بدست می آیند.
می توان پرسید که یک ماتریس U واقعاً چه دورانی انجام می دهد، این دوران حول کدام محور وبه اندازه چه زاویه ای است. برای پاسخ به این سوال دقت می کنیم که یک ماتریس یکانی دودردو را می توان به صورت زیرنوشت:

$$U = e^{i\frac{\theta}{2}\hat{n}\cdot\vec{\sigma}} \equiv \cos\frac{\theta}{2} I + i \sin\frac{\theta}{2} \hat{n}\cdot\vec{\sigma}. \tag{28}$$

که درآن $\hat{n}$ یک برداریکه است . ضریب $1/2$ برای راحتی بعدی درکنار θ قرارداده شده است. حال از این استفاده می کنیم که ماتریس هرمیتی P را می توان به صورت $P = \vec{r}\cdot\vec{\sigma}$ نوشت و از این اتحاد استفاده می کنیم که برای هردوبردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$

$$(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})(\vec{a}\cdot\vec{\sigma}) = (\vec{a}\cdot\vec{b}) I + i(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{\sigma}. \tag{29}$$

کمی محاسبه نشان می دهد که ماتریس $P' = UPU^\dagger$ به شکل زیرقابل بازنویسی است:

$$P' = \vec{r'}\cdot\vec{\sigma}, \tag{30}$$

که درآن

$$\vec{r'} = \cos\theta\ \vec{r} + \sin\theta\ \vec{r}\times\hat{n} + (1-\cos\theta)(\hat{n}\cdot\vec{r})\ \hat{n}. \tag{31}$$

ولی هم چنان که درتمرین های سری چهارم نشان داده اید این عبارت دقیقاً به این معنی است که بردار $\vec{r}$ حول محور $\hat{n}$ به اندازه زاویه θ چرخیده است. بنابراین ماتریس $U = e^{i\frac{\theta}{2}\hat{n}\cdot\vec{\sigma}}$ دورانی حول محور $\hat{n}$ به اندازه زاویه θ انجام می دهد.

۴ یکسانی گروه های $SO(1,3)$ و $SL(2,C)/Z_2$

گروه $SO(1,3)$ گروه تبدیلات ویژه لورنتز است که روی فضازمان ۳+۱ بعدی اثر می کند. به ازای هرنقطه $x=(x^0,x^1,x^2,x^3)$ درفضازمان چهار بعدی اندازه چهار− بردارِ x به صورت زیر بیان می شود که به آن طول مینکووسکی آن چهاربردار نیز می گویند:

$$(x_0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2=\eta_{\mu,\nu}x^\mu x^\nu=x^T\eta x, \tag{32}$$

که درآن

$$\eta=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}, \tag{33}$$

اصطلاحا متریک مینکوسکی خوانده می شود. درایه های این ماتریس را با $\eta_{\mu,\nu}$ و درایه های وارونِ آن را با $\eta^{\mu,\nu}$ نشان می دهیم، یعنی

$$\eta^{\mu\nu}\eta_{\nu,\alpha}=\delta^\mu_\alpha. \tag{34}$$

با این متریک می توان اندیس ها را بالا و پایین برد، یعنی برای هر چهاربردارِ A داریم

$$A_\mu=\eta_{\mu,\nu}A^\nu,\qquad A^\mu=\eta^{\mu,\nu}A_\nu. \tag{35}$$

بدلیل شکل خاص این متریک، یک متریک از نوع $(1,3)$ خوانده می شود و کلیه تبدیلات خطی ای که اندازه بردارهای فضا زمان را حفظ کنند، تبدیلات $O(1,3)$ خوانده می شوند. فرض کنید که $\Lambda\in O(1,3)$. دراین صورت تبدیل خطی زیر را در نظر می گیریم:

$$x\longrightarrow x'=\Lambda x, \tag{36}$$

تقاضای ما این است که طول مینکوسکی x برای همه x ها حفظ شود یعنی

$$x'^T\eta x'=x^T\eta x,\qquad \forall\ \ x. \tag{37}$$

اما این امر به این معنی است که Λ می بایست در شرط زیر صدق کند:

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta. \tag{38}$$

این رابطه نتیجه می دهد که $det(\Lambda) = \pm 1$. آن زیرگروهی از $O(1,3)$ که دترمینان ماتریس های آن برابر با یک است $SO(1,3)$ خوانده می شود.

این گروه همان گروه تبدیلات لورنتز است. (در یکی از درسهای آینده به تفصیل در این باره سخن خواهیم گفت و در آن جا یاد خواهیم گرفت که گروه لورنتز دسته خاصی از این تبدیلات است ولی فعلا از این تفاوت در می گذریم.)

تمرین: یک خیزِ لورنتز با سرعت v در راستای محور x به صورت زیر نشان داده می شود (در دستگاه واحد هایی که سرعت نور را برابر با ۱ گرفته‌ایم $c = 1$):

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma(x^0 - vx^1), \\ x'^1 &= \gamma(x^1 - vx^0), \\ x'^2 &= x^2, \\ x'^3 &= x^3, \end{aligned} \tag{39}$$

که درآن $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$.

نشان دهید که ماتریس این تبدیل متعلق به $SO(1,3)$ است. سپس با تغییر متغیرِ $v = \tanh\theta$ شکل این تبدیلات را بازنویسی کنید. چه تفاوت و چه تشابهی بین این تبدیل و دوران وجود دارد. ماتریس تبدیل لورنتزی را که یک خیر در راستای y یا z را نشان می دهد بدست آورید. و بالاخره ماتریس تبدیل لورنتزی را بنویسید که نشان دهنده یک خیر با سرعتِ v در امتداد محور $\hat{n} = (\cos\phi, \sin\phi, 0)$ باشد.

حال که اندکی با گروه $SO(1,3)$ آشنا شدیم می خواهیم نشان دهیم که این گروه نیز با گروه $SL(2,C)$ یعنی گروه ماتریس های 2×2 مختلط با دترمینانِ 1 یکسان است. استدلالی که طی می کنیم بسیار شبیه به استدلالی است که در بخش قبلی به کار بردیم.

به ازای هر چهار بردار (x^0, x^1, x^2, x^3) ، ماتریس هرمیتی زیرراتشکیل می دهیم:

$$P = x^\mu \sigma_\mu \equiv \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix}, \tag{40}$$

که دراینجا

$$(\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3) = (I, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z). \tag{41}$$

ماتریس P هرمیتی است ، و دترمینان آن برابراست با $x^\mu x_\mu$ ، حال به ازای هر $S \in SL(2,C)$ تبدیل زیررا انجام می دهیم

$$P \longrightarrow P' := SPS^\dagger. \tag{42}$$

براحتی می توان فهمید که ماتریس P' نیزهرمیتی است . دترمینان آن نیزبرابربا دترمینان P است زیرا دترمینان S برابربا یک است. بنابراین می توان ماتریس P' را نیز بایک نقطه مثل $(x'^0, x'^1, x'2, x'^3)$ که همان طول مینکوسکی را دارد متناظرکرد، یعنی

$$P' = x'^\mu \sigma_\mu =\equiv \begin{pmatrix} x'^0 + x'^3 & x'^1 - ix'^2 \\ x'^1 + ix'^2 & x'^0 - x'^3 \end{pmatrix}, \tag{43}$$

که درآن $x'^\mu x'_\mu = x^\mu x_\mu$. بنابراین x' بایک تبدیل لورنتز Λ از x بدست می آید وداریم:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu. \tag{44}$$

شبیه به آنچه که درمورد گروه $SU(2)$ داشتیم دراینجا هم اگر داشته باشیم

$$\begin{aligned} &P' = SPS^\dagger \quad \longrightarrow x' = \Lambda x, \\ ,\qquad &P" = S'P'S'^\dagger \longrightarrow x'' = \Lambda' x' \end{aligned} \tag{45}$$

وازآنجا

$$P'' = (S'S)P(S'S)^\dagger, \qquad x'' = (\Lambda'\Lambda)x. \tag{46}$$

بنابراین نگاشتی که به هرماتریس $S \in SL(2,C)$ یک تبدیل $\Lambda \in SO(1,3)$ نسبت می دهد یک همسانی است. ازآنجا که تبدیل های S و $-S$ هردو یک تبدیل لورنتز را ایجادمی کنند نتیجه می گیریم که یکسانی زیربرقراراست:

$$SO(1,3) \equiv SL(2,C)/Z_2. \tag{47}$$

برای اینکه رابطه صریح S, Λ را بدست آوریم می نویسیم:

$$S(x^\mu \sigma_\mu)S^\dagger = x'^\mu \sigma_\mu \equiv \Lambda^\mu_\nu x^\nu \sigma_\mu. \tag{48}$$

حال ماتریس های $\overline{\sigma}_\mu$ را به ترتیب زیرتعریف می کنیم:

$$(\overline{\sigma}_0, \overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2, \overline{\sigma}_3) = (I, -\sigma_x, -\sigma_y, -\sigma_z). \tag{49}$$

صحت رابطه زیررا با کمی محاسبه می توان تحقیق کرد:

$$tr(\overline{\sigma}_\mu \sigma_\nu) = 2\eta_{\mu,\nu}. \tag{50}$$

از رابطه (48) بدست می آوریم:

$$S\sigma_\nu S^\dagger = \Lambda^\mu_\nu \sigma_\mu, \tag{51}$$

وپس از ضرب کردن در $\overline{\sigma}_\alpha$ و محاسبه ردّ طرفین خواهیم داشت:

$$tr(\overline{\sigma}_\alpha S\sigma_\nu S^\dagger) = \Lambda^\mu_\nu tr(\overline{\sigma}_\alpha \sigma_\mu), \tag{52}$$

ویا

$$tr(\overline{\sigma}_\alpha S\sigma_\nu S^\dagger) = \Lambda^\mu_\nu 2\eta_{\alpha\mu} = 2\Lambda_{\alpha\nu}. \tag{53}$$

بنابراین بادردست داشتن ماتریس S می توانیم Λ را به طور یکتا پیداکنیم:

$$\Lambda^\alpha_{|m} = \frac{1}{2} tr(\overline{\sigma}^\alpha S\sigma_\nu S^\dagger). \tag{54}$$

حال توجه می کنیم که هرماتریس کلی $S \in SL(2, C)$ را می توان به صورت زیرنوشت:

$$S = e^{(\vec{a}+i\vec{b})\cdot\vec{\sigma}}. \tag{55}$$

هرگاه $\vec{a} = 0$، S یکانی بوده وچنانکه دربخش قبلی دیدیم نشان دهنده یک دوران است که محورآن بردارِ یکه $\hat{b}$ واندازه دوران آن برابربا $\theta := |\vec{b}|$ است. هرگاه $\vec{b} = 0$، S نشان دهنده یک خیز لورنتزی درراستای $\hat{a}$ با پارامترخیز $\phi := |\vec{a}|$ و یا سرعت $v := \tanh\phi$ است. درحالت کلی اثریک تبدیل کامل لورنتزی را که هم شامل دوران و هم

شامل خیز است بااستفاده از تبدیلات $SL(2,C)$ بدست آورد. راه آن این است که توجه کنیم که S را می توان به شکل زیرنوشت:

$$S = e^{\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} = e^{\phi\hat{n}\cdot\vec{\sigma}} \tag{56}$$

که درآن $\vec{n} = \vec{a} + i\vec{b}$ و $\phi =$ و $\phi := \sqrt{\vec{n}\cdot\vec{n}^*} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2}$ و $\hat{n} = \frac{\vec{n}}{\phi}$. حال می دانیم چنین ماتریسی را همواره می توان به شکل زیرنوشت:

$$S = e^{\phi\hat{n}\cdot\vec{\sigma}} = \cosh\phi\, I + \sinh\phi\ \hat{n}\cdot\sigma. \tag{57}$$

این رابطه شکل صریح یک تبدیل لورنتز را تعیین خواهد کرد.

تمرین: تبدیل $U = \begin{pmatrix} e^{\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-\theta/2} \end{pmatrix}$ را روی ماتریس P اعمال کنید و بگویید که این تبدیل چه نوع خیزی انجام می دهد؟

تمرین: ماتریس U را چنان پیدا کنید که یک خیز در امتدادِ x به اندازه سرعت v انجام دهد. همین کار را برای یک خیز در امتداد محور y نیز تکرار کنید. با استفاده از نتایجی که بدست آورده اید شکل ماتریسی را حدس بزنید که خیزی حول محورِ $\mathbf{n}$ به اندازه‌ی سرعت v انجام دهد. سپس به هر طریقی که می توانید حدس خود را امتحان کنید.

۵ چند قضیه اساسی درمورد همسانی ها

قضیه‌اول : اگر $\phi : G \longrightarrow G'$ یک همسانی باشد آنگاه $Ker(\phi)$ یک زیر گروه بهنجار G است و $Im(\phi)$ یک زیرگروه G' است .

اثبات: $Ker(\phi)$ یک زیرگروه است زیرا:

$$a, b \in Ker(\phi) \longrightarrow \phi(a) = e',\ \ \phi(b) = e' \longrightarrow \phi(ab) = \phi(a)\phi(b) = e'e' = e' \longrightarrow ab \in Ker(\phi), \tag{58}$$

$$a \in Ker(\phi) \longrightarrow \phi(a) = e',\ \ (\phi(a))^{-1} = e' \longrightarrow \phi(a^{-1}) = e' \longrightarrow a^{-1} \in Ker(\phi). \tag{59}$$

$Ker(\phi)$ یک زیرگروه بهنجاراست زیرا:

$$n \in Ker(\phi) \longrightarrow \phi(n) = e' \longrightarrow \phi(gng^{-1}) = \phi(g)\phi(n)\phi(g)^{-1} = \phi(g)e'\phi(g)^{-1} = e' \longrightarrow gng^{-1} \in Ker(\phi). \quad (60)$$

$Im(\phi)$ یک زیرگروه G' است زیرا:

$$x, y \in Im(\phi) \longrightarrow x = \phi(a), \;\; y = \phi(b) \longrightarrow xy = \phi(a)\phi(b) = \phi(ab) \longrightarrow xy \in Im(\phi), \quad (61)$$

و

$$a \in Im(\phi) \longrightarrow x = \phi(a), \;\; x^{-1} = (\phi(a))^{-1} \longrightarrow x^{-1} = \phi(a^{-1}) \longrightarrow x \in Im(\phi). \quad (62)$$

به این ترتیب اثبات قضیه کامل می شود.

قضیه دوم: همسانی $\phi : G \longrightarrow G'$ یکسانی است اگر و فقط اگر ϕ پوششی بوده و درضمن $ker(\phi) = \{e\}$.

اثبات: باید ثابت کنیم که این نگاشت یک به یک است :

$$\phi(a) = \phi(b) \longrightarrow \phi(a)\phi(b)^{-1} = e' \longrightarrow \phi(ab^{-1}) = e' \longrightarrow ab^{-1} = e \longrightarrow a = b. \quad (63)$$

قضیه سوم: اگر $\phi : G \longrightarrow G'$ یک همسانی باشد آنگاه $G/ker(\phi) \sim Im(\phi)$.

اثبات: اولا چون $Ker(\phi)$ یک زیرگروه بهنجار G است، گروه خارج قسمت $G/Ker(\phi)$ معنا دارد. همسانی از $G \longrightarrow G'$ را با ϕ نشان می دهیم. حال باید یک یکسانی بین $G/ker(\phi)$ و $Im(\phi)$ تعریف کنیم: این نگاشت را با ψ نشان می دهیم و به صورت زیر آن را تعریف می کنیم:

$$\forall \;\; [a] \in G/Ker(\phi) \longrightarrow \psi([a]) := \phi(a). \quad (64)$$

این نگاشت خوش تعریف است و بستگی به انتخاب نماینده کلاس ندارد، زیرااگر $a \equiv b$ نتیجه می گیریم که $a = bh$ که درآن $h \in Ker(\phi)$. بنابراین

$$\phi(b) = \phi(ah) = \phi(a)\phi(h) = \phi(a)e' = \phi(a). \quad (65)$$

این نگاشت یک همسانی است زیرا:

$$\psi([a][b]) = \psi([ab]) = \phi(ab) = \phi(a)\phi(b) = \psi[a]\psi[b]. \quad (66)$$

این نگاشت یک به یک است زیرا:

$$\begin{aligned} &\psi([a]) = \psi([b]) \longrightarrow \phi(a) = \phi(b) \longrightarrow \phi(a)\phi(b)^{-1} = e' \longrightarrow \phi(a)\phi(b^{-1}) = e' \\ &\phi(ab^{-1}) = e' \longrightarrow ab^{-1} \in Ker(\phi) \longrightarrow a \equiv b \longrightarrow [a] = [b]. \end{aligned} \quad (67)$$

این نگاشت به طوربدیهی پوششی است، زیرا به روی $Im(\phi)$ تعریف شده است.

۱.۵ مثالهایی از کاربرد قضیایای همسانی

مثال: نگاشت $\phi : U(n) \longrightarrow U(1)$ را باتعریف $\phi(g) := \det(g)$ درنظر می گیریم. این نگاشت یک همسانی است. هسته این نگاشت برابراست با $SU(n)$. بنابرقضیه فوق خواهیم داشت :

$$U(n)/SU(n) \sim U(1)$$

.

مثال: نگاشت $\phi : U(n) \longrightarrow SU(n)$ را باتعریف $\phi(g) := \frac{g}{(\det(g))^{\frac{1}{n}}}$ درنظر می گیریم. این نگاشت یک همسانی است. هسته آن برابر است با ماتریس های به فرم $e^{i\theta} diagonal(1, 1, \cdots 1)$.

بنابراین هسته این نگاشت برابراست با گروه $U(1)$. درنتیجه خواهیم داشت

$$U(n)/U(1) \equiv SU(n)$$

.

به عنوان استراحت هم که شده دراین درس کمی درجاده ای که برای پیشروی دردرس نظریه گروه پیموده ایم توقف می کنیم و به موضوعی می پردازیم که درفیزیک کاربردهای فراوان دارد. می خواهیم به دونمونه مهم ازیکسانی بین گروه ها بپردازیم که ازنظرفیزیکی اهمیت دارند.
این دویکسانی بین گروه دوران $SO(3)$ و گروه $SU(2)/Z_2$ ازیک طرف و بین گروه لورنتز $SO(1, 3)$ و گروه $SL(2, C)$ ازطرف دیگراست.